Exposé 1 : Rappels sur les structures d'algèbres de Lie

Jérôme

17/06/2024

1 Exposé 1 : Rappels sur les structures

Résumé

La théorie des algèbres de Lie est un vaste domaine étudié depuis la deuxième moitié du XIX^e siècle. En particulier, sa théorie des représentation a trouvé de nombreuses applications, comme en physique pour l'étude des niveaux d'énergies d'une particule, et sa généralisation quantique est encore un domaine actif de recherche (si le temps et la motivation le permettent, nous irons un jour explorer les tréfonds de ce milieu dans des exposés ultérieurs).

L'objectif du présent exposé est d'offrir une première introduction aux algèbres de Lie, avec la définition des algèbres de Lie résolubles d'une part, et des algèbres de Lie semi-simple d'autre part. On s'intéressera alors aux premiers résultats de théorie des représentations des ces algèbres de Lie, en s'attardant sur l'étude ad hoc de la mythique $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

2 Algèbres de Lie : notions de base

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1. *Une **algèbre de Lie** est un espace vectoriel L muni d'une application bilinéaire $[\ ,\ ] : L \times L \to L$, appelée **crochet de Lie**, telle que :*

$$\forall x \in L : \quad [x,x] = 0; \tag{1}$$

$$\forall x,y,z \in L : \quad [x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0. \tag{2}$$

Remarque Le premier point est équivalent à l'antisymétrie du crochet.

La deuxième relation est appelée **relation de Jacobi**. Elle peut s'interpréter comme une dérivation.

Une manière d'intuiter le crochet de Lie est de l'imaginer dans un premier temps comme un commutateur.

Définition 2.1.2. *Une **sous-algèbre de Lie** d'une algèbre de Lie L est un sous-espace vectoriel L' de L dont le crochet est obtenu par restriction du crochet de L.*

Exemple 1.

- *Toute algèbre est une algèbre de Lie (on la munit de son commutateur).*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ (associée au groupe de Lie*[1] *$GL_N(\mathbb{C})$ des matrices inversibles de taille N) est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille N muni du commutateur.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ (associée au groupe de Lie $SL_N(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1) est l'espace vectoriel des matrices de traces nulles muni du commutateur. En revanche, ce n'est pas une algèbre.*
- *$\mathbb{R}^3$ munie du produit vectoriel est une algèbre de Lie.*
- *L'espace vectoriel $H = Vect(f, g, c)$ muni du crochet défini par*

$$[p, q] = c; \;\; [c, p] = [c, q] = 0$$

  est l'algèbre de Lie de Heisenberg[2]*.*
- *Un espace vectoriel E de dimension infinie muni du crochet nul est une algèbre de Lie.*

Définition 2.1.3. *Une algèbre de Lie munie d'un crochet nul est dite* ***abélienne****.*

Donnons deux exemples plus précisément, en exhibant la base des algèbres de Lie.

Exemple 2.

- *La $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \; Tr(M) = 0\}$ admet pour base*

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  avec pour relations crochet

$$[h, x] = 2x; \quad [h, y] = -2y; \quad [x, y] = h.$$

- *La $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \; M^* + M = 0 \text{ et } Tr(M) = 0\}$ admet pour base*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  avec pour relations crochet

$$[A, B] = 2C; \quad [B, C] = 2A; \quad [A, C] = -2B.$$

1. Nous ne parlerons pas du lien entre algèbres et groupes de Lie dans ce pdf
2. Cet exemple provient de la mécanique hamiltonienne. L'opérateur p correspond au *moment* et l'opérateur q correspond à la *vitesse* d'une particule

Remarque Attention, $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie mais pas une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie. Par exemple, iA n'est pas dans $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

Définition 2.1.4 (Morphisme d'algèbres de Lie)**.** *Soient L et L' deux algèbres de Lie. Un **morphisme d'algèbres de Lie** entre L et L' est une application linéaire $\varphi : L \to L'$ cohérente avec les crochets, c'est-à-dire telle que pour tous $x, y \in L$:*

$$\varphi([x,y]_L) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{L'} .$$

*De plus, si φ est bijective, on dit que c'est un **isomorphisme d'algèbres de Lie**.*

Remarque On peut donc travailler sur les algèbres de Lie à isomorphismes d'algèbres de Lie près, puisque les caractéristiques d'une algèbre de Lie (une base et l'effet du crochet sur celle-ci) sont préservées par isomorphisme d'algèbres de Lie.

De fait, lorsque je parlerai d'unicité d'une algèbre de Lie, ce sera à isomorphisme près.

Exemple 3.

- *Nous allons montrer que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est le **complexifié** de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.*

  Déjà, il est clair que $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

  D'autre part, l'application linéaire

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \to & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \\ & & x \otimes 1 & \mapsto & x \\ & & x \otimes i & \mapsto & ix \end{array}$$

  est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

  Il est clair qu'une base est envoyée sur une base, il suffit donc de vérifier que les relations crochet sont préservées, en définissant le crochet sur $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par

$$\forall x \otimes z, x' \otimes z' \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : \quad [x \otimes z, x' \otimes z'] = [x, x'] \otimes zz'.$$

Remarque Notons le fait que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ sont deux algèbres de Lie réelles avec le même complexifié $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, mais elles ne sont pas isomorphes en tant qu'algèbres de Lie.

À partir de maintenant, L désignera toujours une algèbre de Lie complexe de dimension finie.

Prenons le temps de classifier les algèbres de Lie en basse dimension.

Exemple 4.

Il n'existe qu'une seule algèbre de Lie de dimension 1. Son crochet est le crochet nul.

Il n'existe qu'une seule algèbre de Lie non abélienne de dimension 2.

En effet, soit $E = \mathrm{Vect}(x, y)$. Puisque l'algèbre de Lie est non abélienne, $[x, y]$ est non nul.

On peut donc le compléter en un base de E avec un vecteur z. Par commodité, renotons ces éléments respectivement x et y. Mais alors

$$[x, y] = ax$$

avec $a \in \mathbb{C}$ non nul. En particulier, si on remplace y par $a^{-1}y$, alors $E = Vect(x, y)$ avec $[x, y] = x$. En particulier, toute algèbre de Lie non abélienne de dimension 2 vérifie ça : il ne peut donc y en avoir qu'une seule.

Il ne reste qu'à vérifier qu'un espace vectoriel satisfaisant ces relations crochet est bien une algèbre de Lie, ce qui est le cas.

2.2 Idéaux d'une algèbre de Lie

Définition 2.2.1. *Soit I un sous-espace vectoriel de L. On dit que I est un* ***idéal*** *de L si :*

$$\forall x \in I, y \in L : \quad [x, y] \in I.$$

Cette propriété est dite ***d'absorption***[3]*.*

Remarque

- Un idéal d'une algèbre de Lie est en particulier une sous-algèbre de Lie (la stabilité par crochets entre éléments de I est assurée par la propriété d'absorption).
- La somme de deux idéaux est un idéal, le quotient de l'algèbre de Lie par un idéal est un idéal.

Exemple 5.

- *L'espace vectoriel nul et l'algèbre de Lie L sont des idéaux de L.*
- *Le noyau d'un morphisme d'algèbres de Lie est un idéal de l'espace de départ du morphisme.*
- *On définit le* ***centre*** *de L par :*

  $$Z(L) := \{x \in L : \quad [x, y] = 0 \ \ \forall y \in L\}.$$

  Le centre est un idéal de L.
- *On définit l'****algèbre dérivée*** *de L par :*

  $$D(L) := \{[x, y] \mid \ x, y \in L\}.$$

  L'algèbre dérivée est un idéal de L.
- *$\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ est un idéal de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$. En effet : la trace d'un commutateur est toujours nulle, donc en particulier, la trace du crochet entre une matrice de tracelle nulle et une autre matrice est nulle. En fait, on peut même prouver que $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$.*

3. En réalité, je ne trouve ce nom nulle part dans la nature, mais le parallèle avec un idéal d'un anneau me paraît trop naturel pour ne pas l'employer.

L'idée qui gouvernera la section suivante est qu'il est naturel d'analyser la structure des algèbres de Lie par le biais de leurs idéaux.

Définition 2.2.2. *On dit qu'une algèbre de Lie L est* ***simple*** *si elle n'est pas abélienne et que ses seuls idéaux non triviaux sont $\{0\}$ et L.*

Remarque

- La condition "non abélienne" est introduite pour éviter toute mauvaise blague avec le cas particulier de l'algèbre de Lie unidimensionnelle.

- Une algèbre de Lie avec un centre non trivial ne peut être simple.

Exemple 6.
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ n'est pas simple.*

- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est simple. On consate que chaque vecteur de la base peut s'obtenir comme crochet à partir d'au moins un des autres. Or, en appliquant le crochet de n'importe quel élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ à x deux fois, on obtient $y \in I$, et donc $x \in I$ et $h \in I$. De fait, le seul idéal non-nul de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre entière.*

- *L'algèbre de Heisenberg n'est pas simple.*

On va s'intéresser aux cas de deux familles d'algèbres de Lie caractérisées par des idéaux particulier.

3 Algèbres résolubles et semi-simples

3.1 Algèbres de Lie résolubles

On s'inspire de la définition de groupe résoluble.

Définition 3.1.1. *On définit les* ***séries dérivées*** *de L par récurrence :*

$$L^{[1]} := L;$$
$$L^{[n]} := D\left(L^{[n-1]}\right).$$

Définition 3.1.2. *Une algèbre de Lie L telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $L^{[n]}$ est dite* ***résoluble.***

Un idéal de L est dit résoluble s'il est résoluble en tant qu'algèbre de Lie.

Remarque Je ne parlerai pas d'algèbre de Lie nilpotente dans cet exposé, par souci de concision. Il s'agit d'une sous-familles d'algèbres de résolubles, définies de manière similaire avec des séries centrales descendantes. On peut se référer à [**Humphreys**], par exemple, pour plus d'informations.

Exemple 7.
- *Une algèbre de Lie abélienne est résoluble.*

- *L'espace vectoriel $\mathbb{C}\,x \oplus \mathbb{C}\,y$ muni du crochet $[x, y] = x$ est une algèbre de Lie résoluble.*

Proposition 3.1.3. *La somme de deux idéaux résolubles est un idéal résoluble.*

Définition 3.1.4. *Le* ***radical*** *d'une algèbre de Lie L est l'idéal résoluble maximal de L.*

Plus explicitement, il s'agit de la somme de tous les idéaux maximaux.

Exemple 8.

- *Pour une algèbre de Lie résoluble, $rad(L) = L$. C'est même une caractérisation du fait d'être résoluble.*
- *Pour une algèbre de Lie simple, $rad(L) = 0$. Toutefois, une algèbre de Lie avec un radical nul peut ne pas être simple. Par exemple, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (avec le crochet défini terme à terme) n'est pas simple (ses seuls idéaux non triviaux sont deux copies de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ qui ne sont pas résolubles).*

Nous allons donc nous intéresser aux algèbres de Lie de radical nul : les algèbres de Lie semi-simple.

3.2 Algèbres de Lie semi-simples

Définition 3.2.1. *Une algèbre de Lie L est dite* ***semi-simple*** *si $rad(L) = 0$.*

Exemple 9.

- *Une algèbre de Lie simple est semi-simple.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est semi-simple.*

Proposition 3.2.2. *Une algèbre de Lie L est semi-simple si et seulement si son seul idéal résoluble est 0.*

Remarque Je profite de cette proposition pour mentionner le fait qu'il existe en réalité plusieurs définitions équivalentes de la semi-simplicité et de la résolubilité des algèbres de Lie [4].

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que L est semi-simple. Soit I un idéal résoluble de L.

Par maximalité du radical, si $I \neq L$, on a $I \subset \mathrm{rad}(L) = 0$. Donc les seuls idéaux résolubles de L son triviaux.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si L n'admet que des idéaux résolubles triviaux, alors $\mathrm{rad}(L) = 0$ et donc L est semi-simple. $\square$

Remarque Mais pourquoi nous embêtons-nous avec ces histoires d'algèbres de Lie résolubles et semi-simples ? À quel point recouvre-t-on les algèbres de Lie en général ?

En fait, la **décomposition de Levi** affirme que toute algèbre de Lie peut se décomposer en le produit semi-direct (notion analogue à celle de théorie des groupes) d'une sous-algèbre de Lie semi-simple et d'un idéal résoluble. En particulier, l'idéal résoluble est le radical de l'algèbre de Lie.

Dans le cas particulier où l'algèbre de Lie est **réductive** (son radical est égal à son centre), alors l'idéal résoluble est son centre et l'algèbre de Lie semi-simple est son algèbre dérivée.

4. Les pages wikipédia respectives de ces notions les répertorient, par exemple

4 Représentations des algèbres de Lie

4.1 Définition et représentation adjointe

Définition 4.1.1. *Une* ***représentation*** *d'une algèbre de Lie L est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : L \to End(V)$.*

De plus, on définit la ***dimension*** *d'une représentation comme la dimension de l'espace vectoriel associé.*

Remarque Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la représentation, on assimilera une représentation à l'espace vectoriel associé.

De plus, dans ce cas, au lieu de noter $\rho(x)(v)$ l'évaluation en un élément $v \in V$ de l'endomorphisme $\rho(x)$, on écrira $x \cdot v$.

Exemple 10.

- *N'importe quel espace vectoriel peut être muni d'une structure de représentation avec le morphisme nul.*
- *Soit L une algèbre de Lie. Alors L peut être muni d'une structe de représentation de L, via la* ***représentation adjointe*** *:*

$$\begin{array}{cccc} ad & : & L & \to & End(L) \\ & & x & \mapsto & ad_x : y \mapsto [x,y] \end{array} .$$

Exemple 11. *Nous allons donner des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimensions* 1, 2 *et* 3.

- *Soit $V = Vect(v)$ une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Alors V est la* ***représentation triviale*** *(tout élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est envoyé sur l'endomorphisme nul).*

  En effet, notons λ_x (resp. λ_y, λ_h) la valeur propre de x (resp. y, h). Alors, par exemple :

  $$\lambda_h v = h \cdot v = [x,y] \cdot v = \lambda_x \lambda_y v - \lambda_y \lambda_x v = 0$$

  donc $\lambda_h = 0$. De même :

  $$2\lambda_x v = [h,x] \cdot v = \lambda_h \lambda_x v - \lambda_x \lambda_h v = 0$$

  et donc $\lambda_x = 0$. De la même manière, $\lambda_y = 0$, et donc la représentation est triviale.

- *Soit $\mathbb{C}^2$. Alors $\mathbb{C}^2$ peut être muni d'une structure de représentation (on identifie $End(\mathbb{C}^2)$ à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) :*

  $$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ & & a & \mapsto & aM \end{array}$$

  (l'action est donc définie par le produit matriciel). Cette représentation est appelée ***représentation naturelle****.*

- *La représentation adjointe fournit un exemple de représentation de dimension* 3 *de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Remarque Nous verrons à la fin de ce document que ces représentations sont en fait les seuls à isomorphisme de Lie près.
Remarque Pourquoi nous intéressons-nous au représentations d'algèbre de Lie ? Parce qu'il est plus commode de travailler avec des algèbres de Lie matricielles, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{End}(V)$ pour un espace vectoriel V. Si le morphisme d'une représentation est injectif, on peut identifier l'algèbre de Lie à une algèbre de Lie matricielle. Le théorème d'Ado assure par exemple qu'on peut toujours identifier une algèbre de Lie de dimension finie à une algèbre de Lie matricielle.

4.2 La forme de Killing

Nous allons définir une forme bilinéaire sur l'algèbre de Lie L qui nous permettra de caractériser les différentes algèbres de Lie.

Définition 4.2.1 (Forme de Killing)**.** *On définit la* ***forme de Killing*** *comme la forme bilinéaire symétrique*

$$K \ : \ \begin{array}{ccc} L \times L & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & Tr\,(ad_x \circ ad_y) \end{array}.$$

Remarque

- La symétrie provient de la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- Invariance

Exemple 12. *Calculons explicitement la forme de Killing de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. *On écrit les différents adjoints de la base* (x, y, h) *dans cette même base.*

$$ad_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ad_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$K(x,y) = 4; \quad K(h,h) = 8$$

et tous les autres valent 0.

Définition 4.2.2. *Une forme bilinéaire* φ *sur* L *est dite* ***non-dégénérée*** *si*

$$\{x \in L| \quad \forall y \in L : \ \varphi(x,y) = 0\} = 0.$$

Cet ensemble est appelé ***radical*** *de* φ *et on le note* $Rad(\varphi)$.

Exemple 13. *Pour* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, *on peut décrire* K *sous forme matricielle dans la base* (x, y, h) *:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $-128 \neq 0$: la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est non-dégénérée.

Lemme 4.2.3. *Le radical d'une algèbre de Lie L est un idéal de L.*

Démonstration. Cela provient de la propriété d'invariance de la forme de Killing. $\square$

Le radical de la forme de Killing d'une algèbre de Lie n'est pas sans lien avec le radical de celle-ci.

Théorème 4.2.4 (Critère de Cartan)**.** *Une algèbre de Lie L est résoluble si et seulement si sa forme de Killing K vérifie $D(L) \subset Rad(K)$.*

Démonstration. $\Rightarrow$ D'après le théorème de Lie, on sait que la représentation adjointe est trigonalisable. En particulier, pour tout $x \in D(L)$, ad_x peut être écrite sous forme de matrice triangulaire supérieure stricte. En particulier, pour tout $y \in L$, $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ est triangulaire supérieure stricte, donc de trace nulle. D'où $x \in \mathrm{Rad}(K)$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons $K\left(D(L)\right) = 0$. On note $H := \mathrm{ad}_{|D(L)}(D(L))$. Le noyau de $\mathrm{ad}_{|[D(L)]}$ est l'intersection du noyau de ad (qui est exactement $Z(L)$) et de $D(L)$. Ainsi, on a

$$H \simeq \mathrm{ad}([L, L]) / \left(Z(L) \cap D(L)\right)$$

$\square$

Théorème 4.2.5. *Une algèbre de Lie L est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non-dégénérée.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que L est semi-simple, c'est-à-dire que $\mathrm{rad}(L) = 0$. Soit S le radical de K.

Par définition, pour tous $x \in S$ et $y \in L$, on a $K(x, y) = 0$. C'est donc vrai en particulier pour $x \in [S, S]$. Par critère de Cartan, cela signifie donc que S est résoluble. Or S est aussi un idéal de L. Par définition de $\mathrm{rad}(L)$, on a nécessairement $S = 0$: la forme de Killing est non-dégénérée.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons $\mathrm{Rad}(K) = 0$. On souhaite montrer que L est semi-simple, on peut donc par exemple prouver que tout idéal abélien I de L est inclus dans $\mathrm{Rad}(K)$.

En effet, soit $x \in I$. Alors, pour tout $y \in L$, on a $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y : L \to L \to I$ (par propriété d'absorption de I). Ainsi, $\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y\right)^2 : L \to D(I)$. Or I est abélien, donc $D(I) = 0$. Ainsi, $(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$ nilpotente, et donc sa trace est nulle. Autrement dit, $K(x, y) = 0$. C'est vrai pour tout $y \in L$, donc $x \in \mathrm{Rad}(K) = 0$, d'où I idéal nul. $\square$

Nous sommes maintenant armés pour justifier la terminologie "semi-simple" des algèbres de Lie.

Théorème 4.2.6. *Soit L une algèbre de Lie semi-simple. Alors il existe des idéaux simples $L_1, \dots, L_t$ de L tels que*

$$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t.$$

Démonstration. Soit I un idéal de L. On considère $I^\perp := \{x \in L| \quad K(x,y) = 0 \ \forall y \in I\}$. Cet ensemble est également un idéal de L, par invariance de K.

On considère l'idéal $I \cap I^\perp$ de L. La restriction de la forme de Killing à cet idéal est, par définition, nulle. Par critère de Cartan, cela signifie que $I \cap I^\perp$ est un idéal résoluble de L. Par semi-simplicité, $I \cap I^\perp = 0$. Par ailleurs, on peut prouver que $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$, et donc $L = I \oplus I^\perp$.

On peut maintenant procéder par récurrence sur la dimension de L. Si L n'a pas d'idéal propre non nul, alors L est simple. Sinon, soit L_1 un idéal non nul de L minimal. D'après ce qui précède, on peut décomposer $L = L_1 \oplus L_1^\perp$.En particulier, un idéal de L_1 est également un idéal de L. Ainsi, L_1 est semi-simple, et même simple par minimalité. De la même manière, $L_1^\perp$ est également semi-simple. Par hypothèse de récurrence, on peut donc le décomposer en somme directe d'idéaux simples de $L_1^\perp$, qui sont aussi des idéaux simples de L. □

Corollaire 4.2.6.1. *Tout idéal d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple.*

Démonstration. Soit I un idéal d'une algèbre de Lie semi-simple L. D'après ce qui précède, il existe $I_1, \dots, I_k$ des idéaux simples de L tels que

$$L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k.$$

On considère les $I \cap I_j$ non-nuls : chacun d'eux est un idéal non-nul de I_j, qui est simple. Donc $I \cap I_j = I_j$, d'où $I_j \subset I$: I est semi-simple. □

Remarque L'intérêt de la forme de la Killing ne se limite pas à caractériser les différentes algèbres de Lie. Par exemple, on peut exhiber un générateur du centre de l'algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie en regardant l'image réciproque de l'identité, appelé **élément de Casimir**.

4.3 Élement de Casimir

Soit L une algèbre de Lie semi-simple. D'après la sous-section précédente, on sait donc que la forme de Killing de L, que l'on note K, est non-dégénérée. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de L. Puisque K est non-dégénérée, il existe une base duale de $(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à K, que l'on note $(x_1^*, \dots, x_n^*)$. Plus précisément, on a

$$K(x_i, x_j^*) = \delta_{i,j}.$$

Définition 4.3.1. *On définit* ***l'élement de Casimir*** *de L par : $c_L := \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i^* \in L \otimes L$.*

Remarque L'élément de Casimir est canonique, il ne dépend pas du choix de la base.

Exemple 14. *On reprend l'exemple de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ avec sa base (x, y, h).*

On cherche par exemple à calculer x^*. On a déjà vu (exemple 12) que $K(x, y) = 4$, donc $x^* := \frac{1}{4}y$ convient. De la même manière, on pose $y^* := \frac{1}{4}x$ et $h^* := \frac{1}{8}$. D'où

$$4c_{\mathfrak{sl}_2} = x \otimes y + y \otimes x + \frac{1}{2}h \otimes h.$$

4.4 Représentations des algèbres de Lie résolubles

Cette sous-section est inspirée de [**Carter**]. Soit L une algèbre de Lie résoluble.

On commence par caractériser les représentations de dimension 1 (donc les morphismes d'algèbres de Lie de L dans $\mathbb{C}$).

Lemme 4.4.1. *Une forme linéaire $\rho : L \to \mathbb{C}$ est une représentation de L si et seulement si $\rho_{|L^{[2]}} = 0$.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que ρ est une représentation. Alors, pour $x, y \in L$, on a :

$$\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = 0$$

puisque $\mathbb{C}$ est commutatif. Ainsi, ρ est nulle sur $L^{[2]}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si ρ est nulle sur $L^{[2]}$, alors

$$\rho([x, y]) = 0 = [\rho(x), \rho(y)]$$

d'où le résultat. □

Nous allons maintenant prouver que les représentations de dimension 1 sont les seules représentations irréductibles de dimension finie des algèbres de Lie résoluble.

Théorème 4.4.2 (Théorème de Lie)**.** *Toute représentation V irréductible de dimension finie d'une algèbre de Lie résoluble L est de dimension* 1*.*

Remarque Le théorème de Lie assure donc que toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie résoluble admet un vecteur propre commun aux éléments de l'algèbre de Lie.

Démonstration. Puisque L est résoluble, on sait que $L^{[2]} \neq L$. On a également vu qu'on peut alors choisir un idéal I de L tel que $L^{[2]} \subset I$ et $\dim I = \dim L - 1$. On rappelle que I est également une sous-algèbre de Lie de L, et qu'elle est également résoluble.

Nous démontrons le théorème par récurrence sur la dimension de L que l'on note n.

$n = 1$: on peut écrire $L = \mathbb{C}\,x$ pour $x \in L$. Soit v un vecteur propre de $\rho(x) \in \mathrm{End}(V)$, de valeur propre λ_v. Alors, $\mathbb{C}\,v$ est un sous-L-module non nul de V. En effet, pour $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\rho(ax)(bv) = a\lambda_v bv \in \mathbb{C}\,v.$$

Par irréductibilité de V, on a alors nécessairement $V = \mathbb{C}\,v$.

$n \in \mathbb{N}$: on suppose le résultat acquis au rang n. On considère V en tant que I-module. En particulier, V contient un sous-I-module W irréductible.

Par hypothèse de récurrence, on sait alors que W est de dimension 1. Soit $w \in W$ non nul. Alors, pour tout $y \in I$:

$$\rho(y)(w) = \lambda(y)w$$

avec λ le morphisme d'algèbre de Lie associé à la représentation W. On pose alors :

$$U := \{u \in V : \quad \rho(y)(u) = \lambda(y)u \ \ \forall y \in I\}.$$

On constate donc que $0 \neq W \subset U \subset V$. Nous allons montrer que U est un sous-L-module de V. Soit $u \in U, x \in L$. On a :

$$\rho(y)(\rho(x)(u)) = \rho(x)(\rho(y)(u)) + \rho([x,y])(u) = \lambda(y)\rho(x)(u) + \lambda([x,y])u$$

puisque $[x,y] \in I$.

L'objectif est alors de montrer que $\lambda([x,y]) = 0$. En effet, si c'est bien le cas, on a alors $\rho(x)(u) \in U$, et donc U est un sous-L-module de V qui est irréductible. Ainsi, $V = U$. En particulier, on a donc pour tout $v \in V$ et $y \in I$:

$$\rho(y)(v) = \lambda(y)v.$$

De plus, on peut décomposer $L = I \oplus \mathbb{C}\,x$ avec $x \notin I$ (car on a choisi I tel que $\dim I = \dim L - 1$). Soit v un vecteur propre de $\rho(x)$. Alors, d'après ce qu'on a vu, $\mathbb{C}\,v$ est un sous-L-module de V. V étant irréductible, on a donc $\dim V = 1$.

Il ne reste donc qu'à justifier proprement la nullité de $\lambda([x,y])$. $\square$

Remarque Attention, le résultat ne tient pas si le corps de base n'est pas de caractéristique nulle.

Par exemple, si le corps est de caractéristique $p > 0$, on peut considérer

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \mathrm{diag}(0, 1, \dots, p-1).$$

On peut alors vérifier que $[x,y] = x$, donc, d'après ce qu'on a déjà vu, l'algèbre de Lie engendrée par x et y est l'algèbre de Lie non abélienne de dimension 2, résoluble. Or, on peut vérifier que x et y n'admette aucun vecteur propre commun pour la représentation adjointe.

4.5 Représentations des algèbres de Lie semi-simples

4.5.1 Le théorème de Weyl

Nous commençons par constater la cohérence des notions de semi-simplicité des algèbres de Lie d'une part et des représentations d'autre part. Nous allons donc démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.5.1 (Théorème de Weyl). *Soit L une algèbre de Lie semi-simple et V une représentation de dimension finie de L. Alors V est complètement réductible : il existe $V_1, \ldots, V_t$ des sous-représentations irréductibles de V telles que*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t.$$

Démonstration. Par souci de concision, la démonstration ne sera pas explicitée (notamment parce que celles que j'ai vues utilisent l'élément de Casimir dont je ne souhaite pas parler dans cet exposé. Les curieux peuvent se reférer à [**Humphreys**]). □

Remarque Le résultat n'est vrai que pour les représentations de dimension finie. Nous verrons un contre-exemple dans le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.